HAMBURGER INSTITUT FÜR BERUFLICHE BILDUNG

MATHEMATIK

Aufgabenerstellung und Bewertung von Klausuren und Prüfungen für den Erwerb der

Fachhochschulreife

in beruflichen Bildungsgängen im Rahmen dualer oder vollqualifizierender Bildungsgänge, in der Berufsoberschule (Jahrgangsstufe 12), der Fachoberschule und der Höheren Handelsschule

Hamburg

Dezember 2013

Herausgeber: Hamburger Institut für Berufliche Bildung,
Postfach 76 10 48, 22060 Hamburg

Referent: Andreas Grell, Referatsleitung im kaufmännisch-verwaltenden Bereich

Diese Handreichung wird nur in digitaler Form veröffentlicht: www.hibb.hamburg.de

HAMBURGER INSTITUT FÜR BERUFLICHE BILDUNG

Mathematik

Handreichung
für die schulübergreifenden schriftlichen Prüfungsaufgaben zum Erwerb der

Fachhochschulreife

Redaktion:

Volker Bartels

Marcel Biskup

Ralf Blinkmann

Jana Fenske

Kerstin Harde-Jungclaus

Frauke Heise

Klaus Lübbe

Gabriela Stahl

Silke Tiedemann

Koordination:

Andres Urbszat (HI 21-11)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Sehr geehrte Damen und Herren, liebe Kolleginnen und Kollegen,

seit dem Prüfungsdurchgang im Sommerhalbjahr 2013 erhalten die Schülerinnen und Schüler der Bildungsgänge[1]

- Dual Plus FHR
- BFS vq plus FHR
- BOS Jahrgang 12

zentral erstellte Prüfungsaufgaben für die schriftliche Abschlussprüfung in den drei Klausurfächern Fachenglisch, Mathematik und Sprache und Kommunikation. Für die Fachoberschule und die Höhere Handelsschule werden die nachfolgenden Regelungen ab dem Schuljahr 2014/2015 verpflichtend.

Die zentrale Aufgabenerstellung in der schriftlichen Prüfung ist Bestandteil der Standard- und Qualitätssicherung schulischer Arbeit. Verbindlichkeit und Vergleichbarkeit der Unterrichts- und Prüfungsleistungen sind Qualitätsmerkmale für die Fachhochschulreife in Hamburg:

- Einheitliche Standards für Unterricht und Abschlüsse der Schulen werden gesichert.
- Die in den einzelnen Schulen erbrachten Lernleistungen werden durch Evaluation der schulischen Arbeit vergleichbar.
- Die Qualität des Unterrichts wird angehoben, die Fächer werden didaktisch weiterentwickelt.
- Die Qualität der Abschlussqualifikation wird gesichert.
- Die Lehrkräfte werden im Bereich der Erstellung der Prüfungsaufgaben entlastet.

Mit diesem Heft erhalten Sie **die verbindlichen Grundlagen für die zentralen Aufgabenstellungen im Fach Mathematik.** Die allgemeinen Regelungen und Informationen geben dabei den Rahmen der schriftlichen Abschlussprüfung an.

In dieser Handreichung finden Sie konkrete Hinweise auf die Struktur der Prüfung in Mathematik, die Anforderungen, die gestellt werden, die Bewertungsinstrumente und einige Aufgabenbeispiele zur Orientierung.

Ich hoffe, Sie finden diese Handreichung hilfreich für Ihre Arbeit.

Mit freundlichen Grüßen

Andreas Grell, im Dezember 2013

[1] Ausgenommen von den Regelungen dieser Handreichung sind Bildungsgänge, für die die jeweils spezifische Ausbildungs- und Prüfungsordnung andere Regelungen vorsieht – wie z.B. zum Zeitpunkt der Erstellung in der BFS vq KMA oder BFS vq SPA.

1 Allgemeine Regelungen

1.1 Verfahren

Seit dem Sommerhalbjahr 2013 wird die Abschlussprüfung mit zentraler Aufgabenstellung zum Erwerb der Fachhochschulreife in den Bildungsgängen Dual Plus FHR, BFSvq Plus FHR und BOS Jahrgang 12 durchgeführt. Die Schulen erhalten diese Handreichung, die allgemeinen Regelungen für die Fachhochschulreife und entsprechende Beispielaufgaben.

Die Prüfungsaufgaben werden von bewährten und zur Geheimhaltung verpflichteten Prüfern und Prüferinnen aus den Schulen entworfen und anschließend durch die Schulaufsicht geprüft und genehmigt.

1.2 Organisation

Die schriftliche Prüfung im Prüfungsfach Mathematik setzt sich zusammen aus **einem Aufgabensatz**, bestehend aus fachrichtungsübergreifenden Aufgaben (75 % der Punkte) und fachrichtungsbezogenen Aufgaben (25 % der Punkte).

Die Schulen erhalten drei Tage vor der Prüfung Zugang über www.wibes.de zu den Prüfungsunterlagen, die aus den Aufgabensätzen und Erwartungshorizonten inklusive Bewertungshinweisen bestehen. So können diese in der erforderlichen Anzahl an den Schulen vervielfältigt werden. Die Aufgabensätze enthalten (auch als Informationen für die Prüflinge) Angaben über erreichbare Punktzahlen und erlaubte Hilfsmittel.

Der Prüfling

- erhält den Aufgabensatz mit den jeweiligen fachrichtungsbezogenen Aufgaben und
- ist verpflichtet, die Vollständigkeit des Aufgabensatzes vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen, etc.).

1.3 Prüfungszeiten

Die zentrale Prüfung im Fach Mathematik dauert gemäß §40c der APO-AT zwei Zeitstunden (120 Minuten).

1.4 Hilfsmittel

Nicht-grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung sowie ein Rechtschreiblexikon

Der Taschenrechner dient vorrangig als Kontrollinstrument. Rechenwege müssen vollständig dokumentiert werden.

1.5 Inhalt

Alle Aufgaben sind dem **Basiswissen Analysis** zugeordnet.

Fachrichtungsübergreifende Aufgaben: Diese beziehen sich auf allgemeine Anwendungen ganzrationaler Funktionen in der Analysis (Differenzialrechnung und Integralrechnung).

Fachrichtungsbezogene Aufgaben: Diese werden für technisch und für wirtschaftlich / kaufmännisch ausgerichtete Berufe erstellt. Technische Aufgaben beziehen sich auf naturwissenschaftliche Anwendungen und wirtschaftlich / kaufmännische Aufgaben auf das Themengebiet Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen. Alle anderen Fachrichtungen erhalten diesbezüglich allgemeine Aufgaben auf gleichem Niveau.

Fachrichtungen: Technik, Wirtschaft, Allgemein

Die den Schülerinnen und Schülern vorzulegenden Aufgaben sollen der Vereinbarung über den Erwerb der Fachhochschulreife in beruflichen Bildungsgängen (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 05.06.1998 i.d.F. vom 09.03.2001) entsprechen. Dort heißt es zu Abschnitt Vc:

In der schriftlichen Prüfung mit einer Dauer von mindestens zwei Stunden soll nachgewiesen werden, dass die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, komplexe Aufgabenstellungen selbständig zu strukturieren, zu lösen und zu bewerten, die dabei erforderlichen mathematischen oder naturwissenschaftlich-technischen Methoden und Verfahren auszuwählen und sachgerecht anzuwenden.

2 Kompetenzbereich und Wissensbasis

2.1 Übersicht über die Kompetenzbereiche im Fach Mathematik

2.1.1 Die Fähigkeit, mathematisch zu denken

Zur Fähigkeit, mathematisch zu denken, gehört,

- Fragen zu stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es …?“, „Wenn ja, wie viele?“, „Wie finden wir ...?“),
- zu wissen, welche Art von Antworten die Mathematik für solche Fragen bereithält,
- zwischen unterschiedlichen Arten von Aussagen zu unterscheiden (Definitionen, Sätze, Vermutungen, Hypothesen, Beispiele, Bedingungen) und
- Reichweite und Grenzen mathematischer Konzepte zu verstehen und zu berücksichtigen.

2.1.2 Die Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren

Zur Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren, gehört:

- zu wissen, was mathematische Beweise sind und wie sie sich von anderen Arten der mathematischen Argumentation unterscheiden,
- verschiedene Arten von mathematischen Argumentationsketten nachzuvollziehen und zu bewerten,
- ein heuristisches Gespür („Was kann [nicht] passieren und warum?“) und die Entwicklung von mathematischen Argumenten.

2.1.3 Die Fähigkeit zur mathematischen Modellierung

Zur Fähigkeit zur mathematischen Modellierung gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, zu strukturieren,
- „Mathematisierung“ (Übersetzung der „Realität“ in mathematische Strukturen) und „De-Mathematisierung“ (mathematische Modelle im Rahmen der modellierten „Realität“ zu interpretieren),
- mit einem mathematischen Modell zu arbeiten, das Modell zu validieren, das Modell und seine Ergebnisse zu reflektieren, zu analysieren und kritisch zu beurteilen und über das Modell und seine Ergebnisse (inkl. der Grenzen dieser Ergebnisse) zu kommunizieren.

2.1.4 Die Fähigkeit, Probleme zu stellen und zu lösen

Zur Fähigkeit, Probleme zu stellen und zu lösen, gehört:

- verschiedene Arten von mathematischen Problemen zu stellen,
- mathematische Probleme zu formulieren und zu definieren („reine“, „angewandte“, „offene“ und „geschlossene“) und
- verschiedene Lösungswege für diverse Arten von mathematischen Problemen zu finden.

2.1.5 Die Fähigkeit, mathematische Darstellungen zu nutzen

Zur Fähigkeit, mathematische Darstellungen zu nutzen, gehört:

- verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen sowie die Wechselbeziehungen zwischen diesen Darstellungsformen zu erkennen, zu interpretieren und zu unterscheiden und
- verschiedene Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auszuwählen und zwischen ihnen zu wechseln.

2.2 Wissensbasis im Fach Mathematik

Analysis I	***Grundniveau***
Sachgerechter Umgang mit Funktionen, die auch aus **empirischen Daten** hergeleitet werden Näherungsweises Lösen elementarer Optimierungsprobleme	• Darstellung von Daten in einer Tabelle, durch einen Graphen oder einer Gleichung • Typisierung von Funktionsklassen: ganzrationale, einfach gebrochen rationale, trigonometrische und Exponentialfunktionen mit ihren jeweiligen Charakterisierungen • Lösen von elementaren Optimierungsproblemen näherungsweise • Nullstellenbestimmung (ganzrationale Funktionen): pq-Formel/quadratische Ergänzung, Polynomdivision/Horner Schema, Ausklammern, Substitution • Funktionen als Hilfsmittel, um realitätsbezogene Zusammenhänge zu beschreiben und die zugehörigen Problemstellungen zu lösen
Deuten die Ableitung als lokale Änderungsrate bzw. Tangentengleichung Abstraktion von einzelnen lokalen Änderungsraten zur Ableitung als Funktion Berechnung der Ableitungsfunktion bei **ganzrationalen Funktionen**	• Von der lokalen zur momentanen Änderungsrate bzw. von der Sekante zur Tangente • Potenzregel, Faktorregel • Anschauliche Grenzwertbetrachtung • Vom Graph zur Ableitungsfunktion (zeichnerisch) • Rechnerische Lösung von anwendungsbezogenen Optimierungsproblemen, Extremwertaufgaben, Koeffizientenbestimmung
Verwendung von Integralen zur Rekonstruktion von Beständen aus zugehörigen Ableitungsfunktionen, zur Berechnung von Maßen krummlinig begrenzter Flächen und zur Bestimmung von Mittelwerten (bei ganzrationalen Funktionen) Analytische Berechnung von Integralen über ganzrationale Funktionen und Anwendung des Integralbegriffes auf mathematische und realitätsbezogene Problemstellungen.	• Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung • Unterteilung von Flächen

3 Anforderungsbereiche

Die Anforderungen in der Fachhochschulreifeprüfung unterscheiden sich nach der Art, der Komplexität und dem Grad der Selbstständigkeit der geforderten Leistung; sie verlangen unterschiedliche Arbeitsweisen. Zur Erhöhung der Transparenz und Vergleichbarkeit lassen sich drei Anforderungsbereiche beschreiben, ohne dass in der Praxis der Aufgabenstellung die drei Anforderungsbereiche immer scharf voneinander getrennt werden können. Daher ergeben sich bei der Zuordnung der Teilaufgaben zu Anforderungsbereichen Überschneidungen.

Die zentralen Aufgaben der schriftlichen Fachhochschulreifeprüfung ermöglichen Leistungen in den folgenden drei Anforderungsbereichen mit einem Schwerpunkt im Anforderungsbereich II:

Anforderungsbereich I (Reproduktion)

Der Anforderungsbereich I umfasst die Wiedergabe von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang sowie die Beschreibung und Anwendung geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem wiederholenden Zusammenhang.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich I gehören:

Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen,

- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges,
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen,
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z.B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren,
- Verwenden des Taschenrechners als Werkzeug z.B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen, einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen und
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittebar zum Ziel führt.

Anforderungsbereich II (Reorganisation und Transfer)

Der Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich II gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen,
- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form,

- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen,
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist,
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind,
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen,
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze,
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, wenn ähnliche Vorgehensweisen aus dem Unterricht bekannt sind,
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen,
- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell (z.B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem), wenn ähnliche Modellierungen aus dem Unterricht bekannt sind,
- verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen,
- analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen,
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form.

Anforderungsbereich III (Problemlösendes Denken)

Der Anforderungsbereich III umfasst das zielgerichtete Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler aus den gelernten Arbeitstechniken und Verfahren die zur Bewältigung der Aufgabe geeigneten selbstständig aus, wenden sie in einer neuen Problemstellung an und beurteilen das eigene Vorgehen kritisch.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich III gehören:

- kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde,
- planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen,
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z.B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen,
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen,
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist und
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind.

4 Operatoren (Liste der Arbeitsaufträge)

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Schülerinnen und Schüler eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Fachhochschulreife-Aufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Fachoberstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf die Fachhochschulreife.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen **I**, **II** und **III** (vgl. den Erwartungshorizont der Prüfungsaufgaben), wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Angeben, nennen **I**	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen Lösungsweg aufzählen.	Nennen Sie drei weitere Beispiele zu ...
Anwenden **I – II**	Einen bekannten Sachverhalt oder eine Handlungsanweisung, Formel, Vorschrift auf Elemente ihres jeweiligen Definitionsbereichs anwenden.	Wenden Sie die Funktionsgleichung auch auf die gegebenen Zahlen an.
Begründen **II–III**	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, dass die Funktion nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann.
Berechnen **I**	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen.	Berechnen Sie den Flächeninhalt.
Beschreiben **I–II**	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen darstellen (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten“).	Beschreiben Sie den Bereich möglicher Ergebnisse. Beschreiben Sie, wie Sie dieses Problem lösen wollen, und führen Sie danach Ihre Lösung durch.
Bestätigen **I–II**	Eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerischer wie argumentativer) sichern.	Bestätigen Sie, dass die gegebene Funktion eine Stammfunktion zur Ursprungsfunktion ist.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Bestimmen, ermitteln **II–III**	Einen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein).	Ermitteln Sie grafisch den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.
Beurteilen **III**	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren.	Beurteilen Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.
Beweisen, widerlegen **III**	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen.	Beweisen Sie, dass es genau eine Extremstelle gibt.
Entscheiden **II**	Bei Alternativen sich eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen.	Entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist.
Ergänzen, vervollständigen **I**	Tabellen, Ausdrücke oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen.	Ergänzen Sie die Tabelle der Funktionswerte. Vervollständigen Sie die Zeichnung mit den in der Aufgabestellung gegebenen Punkten.
Erstellen **I**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen.	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
Herleiten **II**	Die Entstehung oder Ableitung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeineren Sachverhalten darstellen.	Leiten Sie die gegebene Formel für die Stammfunktion her.
(Re-) Interpretieren **II–III**	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem.	Interpretieren Sie: Was bedeutet Ihre Lösung für die ursprüngliche Frage?
Skizzieren **I–II**	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes grafisch darstellen.	Skizzieren Sie den graphischen Verlauf.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Untersuchen **II**	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien darstellen.	Untersuchen Sie die Funktion. Untersuchen Sie, ob die Verbindungskurve ohne Knick in die Gerade einmündet.
Vergleichen **II–III**	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen.	Vergleichen Sie die beiden Vorschläge.
Zeichnen, **grafisch darstellen** **I–II**	Eine hinreichend exakte grafische Darstellung anfertigen.	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
Zeigen, **nachweisen** **II–III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen.	Zeigen Sie, dass die beiden Geraden parallel sind.
Zuordnen **I–II**	Ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen.	Ordnen Sie die Graphen den gegebenen Gleichungen zu.

5 Notenschlüssel

Die Bewertung schriftlicher Klassenarbeiten* erfolgt an allen beruflichen Schulen nach einem von der Behörde vorgegebenen einheitlichen Notenschlüssel. Er ist auch für die schriftliche Prüfung zur Fachhochschulreife anzuwenden.

* Zur Ermittlung der Prüfungsarbeitsnote: Es werden nur ganze Punkte vergeben. Teilaufgaben werden nicht mit Teilnoten versehen. Die erreichten Punkte werden insgesamt addiert und die Note der schriftlichen Prüfungsarbeit wird anhand der Tabelle ermittelt.

Note 1 = sehr gut (100 - 92 Prozent)

Prozentzahl	100	99	98	97	96	95	94	93	92
Tendenznote	1+		1					1-	

Note 2 = gut (91 – 81 Prozent)

Prozentzahl	91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
Tendenznote	2+			2					2-		

Note 3 = befriedigend (80 - 67 Prozent)

Prozentzahl	80	79	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67
Tendenznote	3+				3						3-			

Note 4 = ausreichend (66 - 50 Prozent)

Prozentzahl	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
Tendenznote	4+					4							4-				

Note 5 = mangelhaft (49 - 30 Prozent)

Prozentzahl	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30
Tendenznote	5+						5								5-					

Note 6 = ungenügend (29 - 0 Prozent)

Prozentzahl	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
Tendenznote	6														

Prozentzahl	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Tendenznote	6														

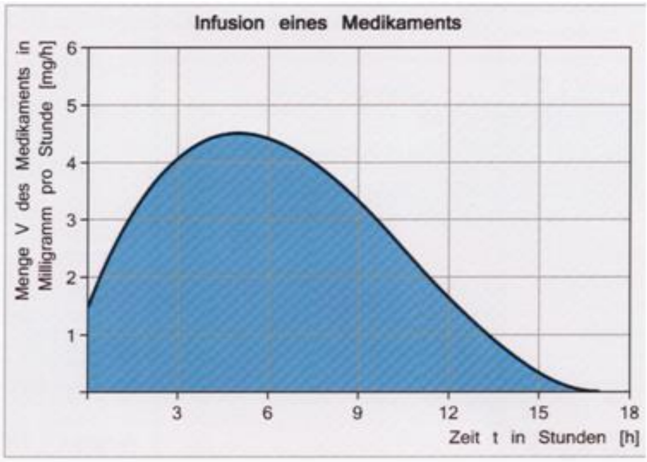
6 Beispielaufgaben

6.1 Fachrichtungsübergreifende Aufgaben

Aufgabe 1: Anwendungsorientierte Kurvendiskussion (30 Punkte)
(Urheberrechtsvermerk: „Aufgabe und Diagramm sind entnommen: Till Dennier: Anwendungsaufgaben zu Polynomfunktionen. Lage 2011. Dennier-Eigenverlag. www.dennier.de“)

Nach einer Operation erhält ein Patient im Krankenhaus eine Infusion, um den Kreislauf stabil zu halten. Das Medikament – eine Kochsalzlösung – wird mittels einer Infusionsflasche über einen Zeitraum von 17 Stunden verabreicht. Die Menge der Infusion (in Milligramm pro Stunde) kann mit Hilfe eines Regulierschlittens variiert werden. Der Verlauf der verabreichten Dosierung für den Patienten wird nahezu dargestellt durch die Funktion:

$$V(t) = \frac{1}{192}t^3 - \frac{11}{64}t^2 + \frac{85}{64}t + \frac{289}{192}$$



©Till Dennier, Anwendungsaufgaben zu Polynomfunktionen, Lage 2011.

Hinweis: Denken Sie an die entsprechenden Antwortsätze.

Aufgabenteil a)

- Berechnen Sie die Dosierung in Milligramm pro Stunde direkt nach der Operation und die Dosierung nach acht Stunden!

Aufgabenteil b)

- Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Menge des verabreichten Medikaments maximal ist.
- Berechnen Sie die Dosierung zu diesem Zeitpunkt (in mg/h).

Aufgabenteil c)

- Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Abnahme der Dosierung am stärksten ist.
- Berechnen Sie, wie stark die Abnahme der Dosierung zu diesem Zeitpunkt ist.

Aufgabenteil d)

- Berechnen Sie die Gesamtmenge des Medikaments in mg, die dem Patienten in den ersten 17 Stunden nach der OP zugeführt wird.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$V(0) \approx 1{,}51$	1		
		1		
	$V(8) \approx 3{,}80$			
	Die Dosierung direkt nach der Operation beträgt 1,51 mg/h, nach acht Stunden sind es 3,89 mg/h.	1		
b)	Berechnung des Maximums:			
	$V'(t) = 0$		1	
	$V'(t) = \frac{1}{64}t^2 - \frac{11}{32}t + \frac{85}{64} = 0$			
	$t^2 - 22t + 85 = 0$			
	$t_{1,2} = 11 \pm \sqrt{121 - 85} = 11 \pm 6$ $t_1 = 17$ $t_2 = 5$		2	
	$V''(t) = \frac{1}{32}t - \frac{11}{32}$		3	
	$V''(17) = \frac{3}{16} > 0 \rightarrow TP$		2	
	$V''(5) = -\frac{3}{16} < 0 \rightarrow HP$		2	
	Alternativ zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung:			
	Hinweis auf die Graphik: Nur bei t = 5 kann das Maximum vorliegen.			
	$V(5) = 4{,}5$	1 1		
	Nach fünf Stunden ist die Dosierung mit 4,50mg/h maximal.			
c)	Berechnung des Wendepunktes			
	$V''(t) = 0$			1
		1		
	$\frac{1}{32}t - \frac{11}{32} = 0 \rightarrow t = 11$			
			2	
	$V'''(t) = \frac{1}{32} \neq 0 \rightarrow \text{WP bei } t = 11$			

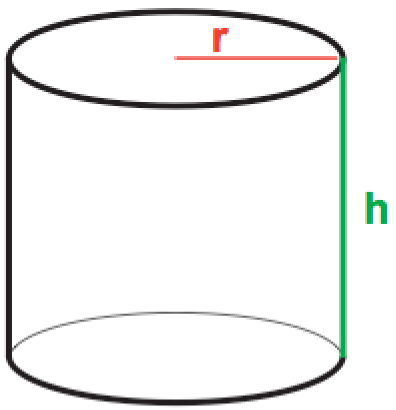
	Alternativ zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung: Hinweis auf die Graphik: Wendepunkt bei t = 11 Nach 11 Stunden ist die Abnahme der Dosierung am stärksten. Abnahme der Dosierung: $V'(11) = -0{,}5625$ Die Abnahme der Dosierung beträgt zu diesem Zeitpunkt circa 0,6 mg/h.	1 1		2
d)	$A = \int_0^{17} V(t)dt$ $= \int_0^{17} (\frac{1}{192}t^3 - \frac{11}{64}t^2 + \frac{85}{64}t + \frac{289}{192})dt$ $= \left[\frac{1}{768}t^4 - \frac{11}{192}t^3 + \frac{85}{128}t^2 + \frac{289}{192}t + C\right]_0^{17}$ $= 44{,}7799 - 0 \approx 44{,}78$ Dem Patienten wurden 44,78mg des Medikaments zugeführt.	 2 1	1 3	
		11	16	3

Aufgabe 2: Extremwertaufgabe **30 Punkte**

Ein Unternehmen produziert Konservendosen in Form von Zylindern (siehe Abbildung). Die größte Dose, die das Unternehmen produziert, hat bisher ein Fassungsvermögen von 0,75 l. Jetzt liegt eine Anfrage nach einer Dose mit einem Fassungsvermögen von 1 l vor. Um möglichst kostengünstig zu produzieren, soll zunächst geprüft werden, welche Maße die neue Dose haben muss, wenn möglichst wenig Blech für die Herstellung verbraucht werden soll.

Bestimmen Sie die Höhe h und den Radius r so, dass möglichst wenig Blech bei der Herstellung der neuen Dosengröße verbraucht wird.
Zeigen Sie dafür zunächst, dass die Zielfunktion zur Ermittlung der optimalen Dosengröße $A(r) = 2\pi r^2 + 2r^{-1}$ lautet.

Anmerkung: Sollten Sie die Zielfunktion nicht bestimmen können, verwenden Sie bitte die gegebene Funktion für Ihre weiteren Berechnungen.

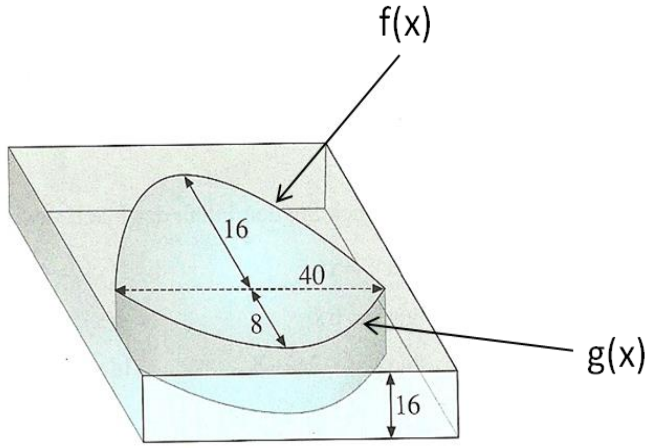


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Ansatz: Deckel und Boden haben eine Fläche von $A = \pi r^2$	1		
	Der Zylindermantel hat eine Fläche von $A = 2\pi r h$	2		
	Hauptbedingung:			2
	$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ soll minimal werden			
	Nebenbedingung:			
	Das Volumen soll 1 l betragen		1	
	$1\ l = 1\ dm^3$			
	$V = \pi r^2 h = 1$ r und h in dm			2
	Auflösen der Nebenbedingung nach h: $h = \frac{1}{\pi r^2}$		2	
	mit $r \neq 0$			
	Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung			
	$notwendige\,Bedingung: A'(r) = 0$			
	$A'(r) = 4\pi r - 2r^{-2}$		2	
	$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2}$			
	$0 = 4\pi r - 2r^{-2}$			
	$0 = 4\pi r^3 - 2$		2	
	$2 = 4\pi r^3$			
	$A(r) = 2\pi r^2 + 2r^{-1}$			
	$\frac{2}{4\pi} = r^3$			1
			2	
	$\sqrt[3]{\frac{2}{4\pi}} = r$	1	1	
	Gesucht ist der Tiefpunkt:			
	$0{,}542 = r$			
	$hinreichende\,Bedingung: A''(r) \neq 0$			2
	$A''(r) = 4\pi + 4r^{-3}$			
	$A''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{4\pi}}\right) = 4\pi + 4 \cdot \frac{4\pi}{2} \triangleright 0 \rightarrow TP$		2	
			2	
	Berechnung von h: $h = \frac{1}{\pi r^2}$	1	1	
	$h = \frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2}{4\pi}}\right)^2} = 1{,}084$		2	
	Der Radius sollte 0,542 dm, die Höhe muss 1,084 dm betragen.	1		
		6	17	7

Aufgabe 3: Integralrechnung — 15 Punkte

Aus 16 mm dickem Plexiglas wird eine Bikonvexlinse ausgeschnitten. Sie ist 40 mm breit und 24 mm lang. Ihre beiden Brechungsflächen sollen parabelförmiges Profil besitzen und lassen sich durch folgende Randfunktionen beschreiben:



$f(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}6x$

$g(x) = 0{,}02x^2 - 0{,}8x$

a) Ermitteln Sie die Gesamtfläche der Bikonvexlinse.

b) Berechnen Sie den Materialverbrauch.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	$Ages = \int_0^{40} (f(x) - g(x))dx = \int_0^{40} (-0{,}04x^2 + 1{,}6x - 0{,}02x^2 + 0{,}8x)dx$ $= \int_0^{40} (-0{,}06x^2 + 2{,}4x)dx = [-0{,}02x^3 + 1{,}2x^2]_0^{40}$ $= 640mm^2 = 6{,}4cm^2$		10	
	$V = Ages * 16mm = 10240mm^3 = 10{,}24cm^3$	5		
		5	10	

6.2 Fachrichtungsbezogene Aufgaben

6.2.1 Technik

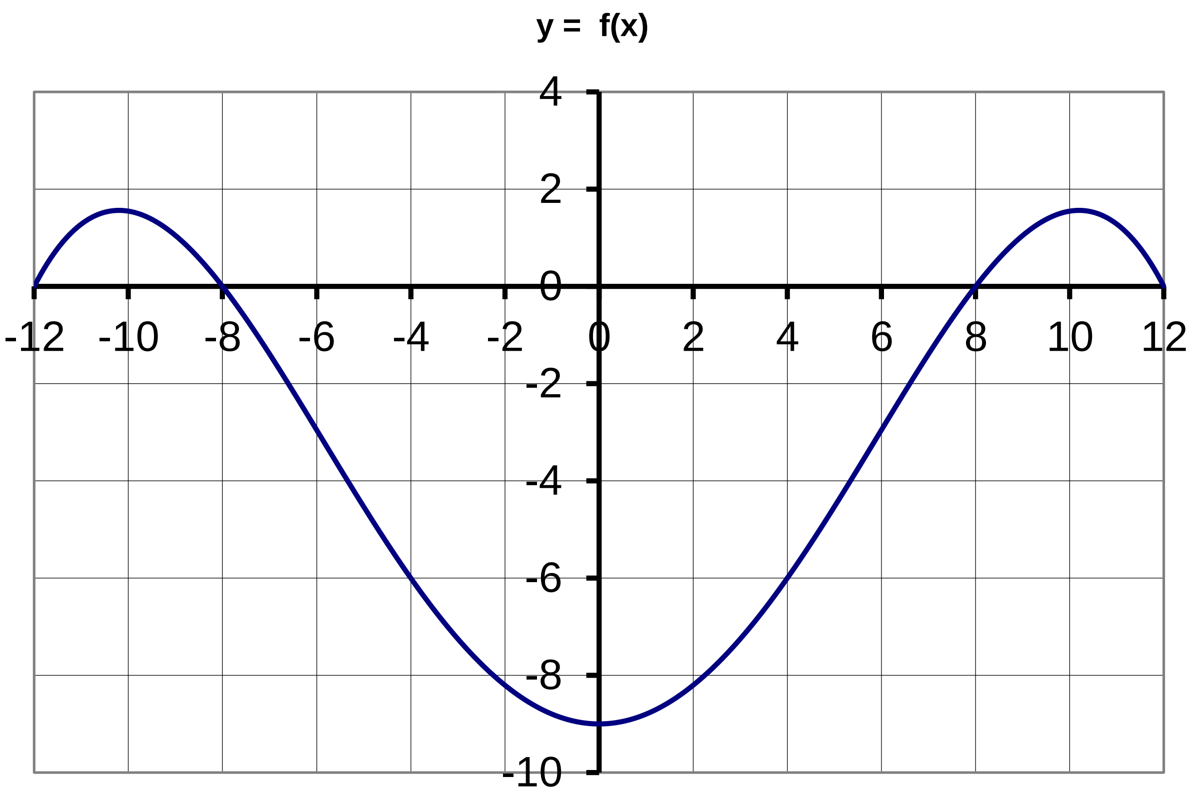
Das Querschnittsprofil eines 16m breiten Kanals ist symmetrisch und soll zur vereinfachten Abbildung in einem Prospekt durch ein Polynom möglichst niedrigen Grades angenähert werden.

Bestimmen Sie also ein Polynom möglichst niedriger Ordnung, welches symmetrisch zur y-Achse ist und welches bei den x-Werten 8m und -8m den Wert 0 annimmt.
In der Kanalmitte (x = 0m) soll der Kanal eine Tiefe von 9,00m haben.

Auf Höhe der Wasseroberfläche hat die Böschung eine Neigung von 125%.

a) Stellen Sie zunächst die Bestimmungsgleichungen auf und bestimmen Sie die minimale Ordnung des Polynoms.

b) Bestimmen Sie dann das Polynom!



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Funktion ist 4.Grades und symmetrisch zur y-Achse, also $f(x) = \; a\,x^4 + bx^2 + c$ und damit $f'(x) = \; 4a\,x^3 + 2bx$			6
	Kanalmitte: $f(0) = -9 \quad => c = -9$ I Ufer: $f(8) = 0 \quad => \; 8^4 a + 8^2 b = 9$ II Böschung: $f'(8) = 1.25 \; => \; 4\,8^3 a + 16b = \frac{5}{4}$ III		9	
	II – 2III $32\,b = 6.5 \; => \; b = \frac{13}{64} = 0.203125$ IV c in III $4\,8^3 a + \frac{13}{4} = \frac{5}{4}$ 4 V $16\;8^3 a = -8 \; => \; a = \frac{-1}{1024}$ Insgesamt also $f(x) = \frac{-1}{1024}\,x^4 + \frac{13}{64}x^2 - 9$		10	
			19	6

6.2.2 Wirtschaft

Das Unternehmen PLASMA stellt Fernseher her. Aus der Herstellung der Fernseher sind dem Produzenten folgende Informationen bekannt:

Mit der Produktion des Modells „Vision“ entstehen bei der täglichen Produktion Fixkosten in Höhe von 15.000,00 €. Weiterhin entstehen bei der Produktion von 20 Fernseher Gesamtkosten in Höhe von 45.000,00 €, bei einer Produktion von 60 Fernseher Gesamtkosten in Höhe von 57.000,00 €. Der Kostenanstieg bei einer Produktion von 50 Fernsehern beträgt 250,00 € pro Fernseher. Die Kapazitätsgrenze der Produktion liegt bei 90 produzierten Fernsehern. Die Kostenfunktion kann näherungsweise durch eine Funktion 3. Grades beschrieben werden.

a) Bestätigen Sie, dass die Kostenfunktion bei den gegebenen Informationen durch die Gleichung
$K(x) = \frac{1}{2}x^3 - 60x^2 + 2.500x + 15.000$
dargestellt werden kann.

b) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten minimal sind und markieren Sie die den zugehörigen Punkt auf dem Graphen in der Anlage.

c) Interpretieren Sie die Bedeutung der minimalen Grenzkosten in Bezug auf die Fernsehproduktion.

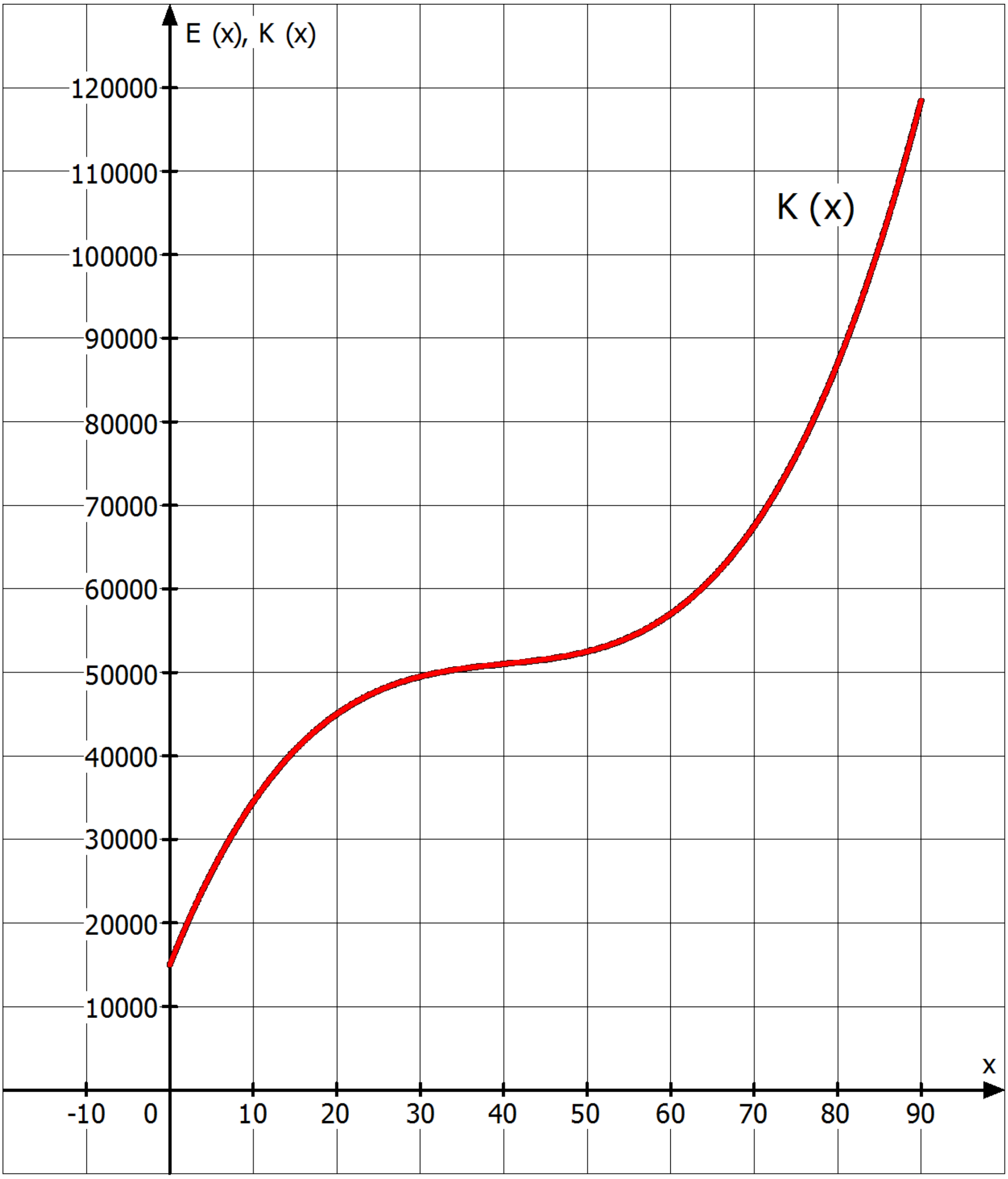
Das Unternehmen verkauft die Fernseher zu einem Preis von jeweils 1.100,00 €.

d) Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion $E(x)$ an und zeichnen Sie den Graphen von $E(x)$ in das Koordinatensystem in der Anlage.

e) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Gewinnfunktion durch
$G(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2 - 1.400x - 15.000$
beschrieben werden kann.

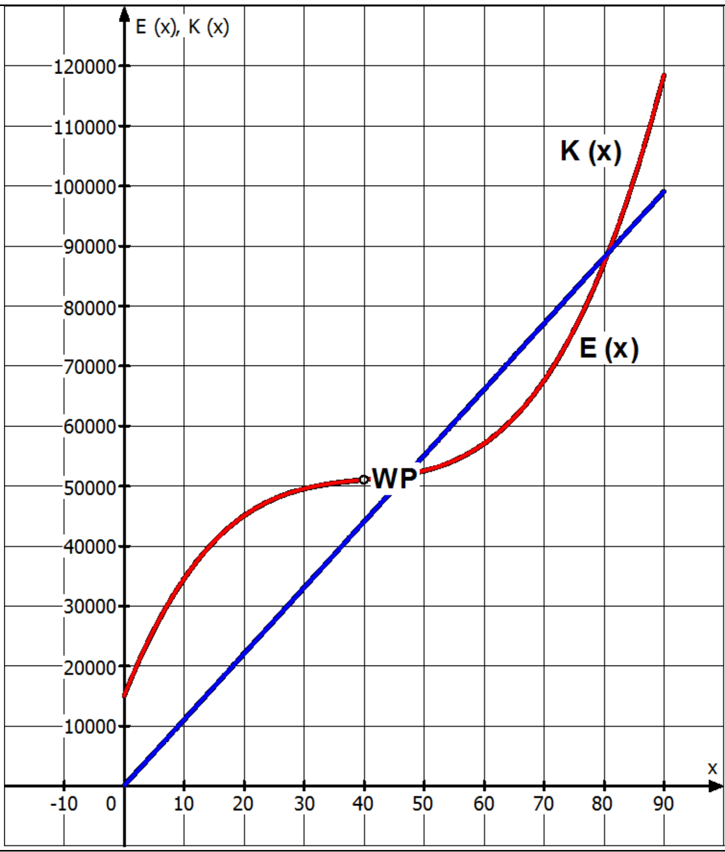
f) Bestätigen Sie, dass das Unternehmen mit Gewinn produziert, wenn mindestens 48 und höchstens 80 Fernseher hergestellt werden.

Anlage zum Aufgabenteil b) und c)



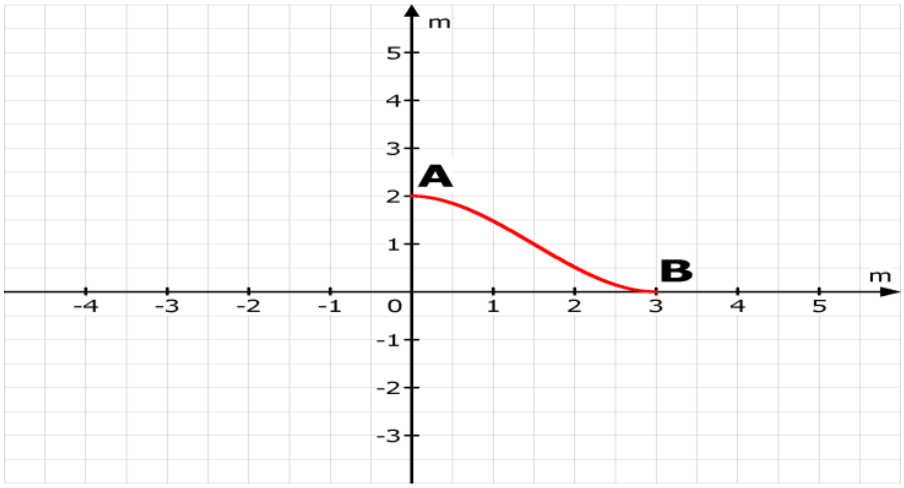
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
a)	$K(x)=\frac{1}{2}x^3-60x^2+2.500x+15.000$ **1. Variante: Durch Probieren** Produzierte Mengen und damit verbundene Gesamtkosten: $K(0)=15.000$ ist richtig $K(20)=0{,}5\cdot 20^3-60\cdot 20^2+2.500\cdot 20+15.000=45.000$ ist richtig $K(60)=0{,}5\cdot 60^3-60\cdot 60^2+2.500\cdot 60+15.000=57.000$ ist richtig Kostenanstieg: $K'(x)=\frac{3}{2}x^2-120x+2.500$ $K'(50)=1{,}5\cdot 50^2-120\cdot 50+2.500=250$ ist richtig Damit erfüllt die Funktion K alle genannten Vorgaben. **2. Variante: Lösen eine LGS** $K(x)=ax^3+bx^2+cx+d; K'(x)=3ax^2+2bx+c$ $K(0)=15.000\rightarrow d=15.000$ $K(20)=45.000\rightarrow 8.000a+400b+20c+15.000=45.000$ $K(60)=57.000\rightarrow 216.000a+3.600b+60c+15.000=57.000$ $K'(50)=250\rightarrow 7.500a+100b+c=250$ I $400a+20b+c=1.500$ II $3.600a+60b+c=700$ III $7.500a+100b+c=250$ $-3.200a-40b=800$ $-7.100a-80b=1.250$ $-700a=-350\rightarrow a=\frac{1}{2};$ $b=\frac{1.250+7.100a}{-80}=-60; c=1.500-400a-20b=2.500; d=1.500$		 1 1 1 1 1 1	
b)	Minimum der Grenzkosten: Grenzkosten: $K'(x)=\frac{3}{2}x^2-120x+2.500$ Minimum: $K''(x)=3x-120; K'''(x)=3$ $K''(x)=0\wedge K'''>0$ $0=3x-120\rightarrow x=40\ K'''(40)=3>0\rightarrow TP$ bzw. WP bei x = 40 Markieren des Wendepunkts (siehe d)		s.o. 2 1 2 1	
c)	Die minimalen Grenzkosten werden durch den Wendepunkt der Kostenkurve angegeben. Beim Minimum von K‘ ist die Kostensteigerung pro zusätzlich produzierten Fernseher am geringsten. Das bedeutet allerdings nicht, dass hier bereits am kostengünstigsten pro Stück produziert wird → langfristige Preisuntergrenze.			2
d)	$E(x)=1.100x$	1		

		2		
e)	$G(x) = E(x) - K(x)$ $G(x) = 1.100x - \left(\frac{1}{2}x^3 - 60x^2 + 2.500x + 15.000\right)$ $= -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2 - 1.400x - 15.000$	1	1	
f)	Überprüfung: $G(47) = -171{,}5$ und $G(48) = 744$ bzw. $G(80) = 1.000$ und $G(81) = -460{,}5$ Die Nullstellen der Gewinnfunktion geben an, ab welcher Mengeneinheit die Erlöse die Kosten decken. Da Fernseher nur ganzzahlig produziert werden können, muss folglich bei der Produktion von 47 Stück bzw. 81 Stück ein Verlust entstehen. Das Unternehmen produziert mit Gewinn, wenn die tägliche Produktionsmenge zwischen 48 und 80 Stück liegt.		2 2	2
		4	17	4

6.2.3 Allgemein

Für einen Kindergarten soll eine besonders lange Rutsche angefertigt werden.



Sie soll 2 m hoch und 3 m lang werden. Am Einstieg A und am Endpunkt B soll sie waagerecht verlaufen.

a. Ermitteln Sie die Funktion 3. Grades für das Höhenprofil der Rutsche.

b. Das Gefälle der Rutsche darf nicht größer als 100% sein. Weisen Sie nach, dass die oben dargestellte Rutsche den baulichen Bestimmungen genügt.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a.)	Der Punkt A hat die Koordinaten (0/2) und Punkt B (3/0) Der Punkt A muss ein Hochpunkt und Punkt B ein Tiefpunkt sein. f(0)=2 f(3)=0 f'(0)=0 f'(3)=0 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ I $2 =a\cdot0^3+b\cdot0^2+c\cdot0+d \rightarrow d=2$ II $0=a\cdot3^3+b\cdot3^2+c\cdot3+d \rightarrow 0=27a+9b+2$ III $0=3a\cdot0^2+2b\cdot0+c \rightarrow c=0$	1 1	4 2	

	IV $0=3a\bullet3^2+2b\bullet3+c \rightarrow 0=27a+6b$	2		
	II-IV $3b+2=0$ / -2			
	$3b=-2$ / :3			
	$\underline{b=-\frac{2}{3}}$		1	
	b in IV eingesetzt:	1		
	$27a+6\bullet(-\frac{2}{3})=0$			
	$27a-4=0$ / +4		1	
	$27a=4$ / /27			
	$\underline{a=\frac{4}{27}}$	1		
	$\underline{f(x)=\frac{4}{27}x^3-\frac{2}{3}x^2+2}$			
	Das größte Gefälle befindet sich am Wendepunkt.			
	$f'(x)=\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{3}x$	1	1	
	$f''(x)=\frac{8}{9}x-\frac{4}{3}$		1	
	Um den Wendepunkt zu bestimmen wird f“(x)=0 gesetzt.			
	$\frac{8}{9}x-\frac{4}{3}=0/+\frac{4}{3}$			
	$\frac{8}{9}x=\frac{4}{3}/\bullet\frac{9}{8}$		2	
	$\underline{x=\frac{3}{2}}$			1
b)	Die Steigung wird über f‘($\frac{3}{2}$) ermittelt			
	$f'(\frac{3}{2})=\frac{4}{9}\bullet(\frac{3}{2})^2-\frac{4}{3}\bullet\frac{3}{2}$	1		1
	$\underline{f'(\frac{3}{2})=-1}$	1		
	=> m = -1. Dieser Wert entspricht 100%.	1		
	Das Gefälle entspricht der Baubestimmung.			1
		10	12	3